

Матрицаның рангісі

Анықтама. Матрицаның базистік миноры деп реті матрицаның рангісіне тең болатын кез келген нөлге тең емес минорды айтамыз.

Анықтама. А матрицасының рангісі деп, оның нөлге тең емес анықтауышынан туындайтын анықтауыштың жоғарғы ретін айтады. ($\text{rang} A = r_A$)

Ескерту. Кері матрица тек қана квадратты ерекше емес матрица үшін бар болады.

Берілген $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ матрицаның рангісін табуымыз керек,

яғни 1) $\text{rang} A = r_A = ?$;

2) базистік минорын көрсету керек.

Ол үшін, мәні нөлге тең емес, реті ең кіші анықтауышты қарастырайық.

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - (-1) \cdot (-2) = -2 \neq 0$. Әрі қарай осы анықтауышты көмкеретін реті жоғары анықтауыштарды қарастырамыз.

Ол анықтауыштар: $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $\Delta_3^I = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$, $\Delta_3^{II} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; енді мәндерін есептеп, табайық.

$$\Delta_3 = 0 + 3 + 2 - 0 - 1 - 4 = 0;$$

$$\Delta_3^I = 0 + 3 - 10 - 0 - 1 + 8 = 0;$$

$\Delta_3^{II} = 0 + 6 - 2 - 0 - 2 - 2 = 0$; сонымен, матрицаның рангісі $\text{rang} A = r_A = 2$ болады. Ал базистік минор $\Delta_2 \neq 0$.

Сызықты біртекті емес алгебралық теңдеулер жүйесі

Берілген теңдеулер жүйесін Крамер формуласымен және матрицалық түрге келтіріп шешу керек.

а) Крамер формуласын жазайық: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1, 2$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}, \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ -x_1 + 4x_2 = 2. \end{cases} \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5 \neq 0; \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 6 = 10;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5, x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

Сонымен $x_1 = 2, x_2 = 1$.

б) Енді матрицалық теңдеуді жазайық.

$A \cdot X = B$ – матрицалық теңдеу, $X = A^{-1} \cdot B$ – шешімі.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1, \\ -x_1 + 4x_2 = 2, \end{cases} \text{ мұнда } A^{(2 \times 2)} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{(2 \times 2)}, B^{(2 \times 1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^{(2 \times 1)}, X^{(2 \times 1)} = \begin{pmatrix} x_1 = x_{11} \\ x_2 = x_{21} \end{pmatrix}^{(2 \times 1)}$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5 \neq 0; A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}^{(2 \times 2)}, A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot 4 = 4; A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot (-1) = 1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1) \cdot (-3) = 3; A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot 2 = 2;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{(2 \times 2)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}^{(2 \times 1)} = X^{(2 \times 1)} = \begin{pmatrix} x_1 = x_{11} \\ x_2 = x_{21} \end{pmatrix}^{(2 \times 1)} = ?$$

$$x_1 = x_{11} = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 10; x_2 = x_{21} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5; X = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} x_{11}=10 \\ x_{21}=5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Берілген теңдеулер жүйесін Крамер формуласымен және матрицалық түрге келтіріп шешу керек.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$1) x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, 2, 3. \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot (-2) - 1 \cdot (-3) \cdot 1 =$$

$$= -4 - 1 + 3 + 2 - 2 + 3 = 1, \Delta = 1.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -8 + 9 - 1 + 2 - 6 + 6 = 2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 2 - 1 + 3 - 1 + 4 = 1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 - 6 - 4 + 9 + 1 = -1,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2}{1} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Сонымен $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$. Табылған жүйе шешімдерінің дұрыстығын тексерейік. Ол үшін, жүйедегі кезкелген теңдеуді аламыз, яғни

$x_1 - x_2 - x_3 = 2, 2 - 1 - (-1) = 2; 2 = 2$, теңдеуді қанағаттандырады, демек, жүйе дұрыс шешілген.

2)Берілген жүйені матрицалық түрге келтірейік.

$A \cdot X = B$, оның шешімі $X = A^{-1} \cdot B$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{(3 \times 3)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}^{(3 \times 1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X^{(3 \times 1)} = \begin{pmatrix} x_1 = x_{11} \\ x_2 = x_{21} \\ x_3 = x_{31} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} - A \text{ матрицасының кері матрицасы.}$$

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ – алгебралық толықтауыш.

$$\Delta_A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot (-2) - 1 \cdot (-3) \cdot 1 =$$

$$= -4 - 1 + 3 + 2 - 2 + 3 = 1.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2 - 1) = 3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3 - 2) = -5;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (2 - 3) = 1;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2 + 1) = -1;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-3 + 1) = 2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1 + 2) = 1;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -2; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = 3.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(3 \times 3)} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}^{(3 \times 1)} = \begin{pmatrix} x_1 = x_{11} \\ x_2 = x_{21} \\ x_3 = x_{31} \end{pmatrix}$$

$$x_1 = x_{11} = -1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 2; \quad x_2 = x_{21} = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + (-2) \cdot 1 = 1;$$

$$x_3 = x_{31} = -5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = -1.$$

$$\text{Сонымен, } X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Үйге тапсырма

Берілген теңдеулер жүйесін Крамер формуласымен және матрицалық түрге келтіріп шешіңдер.

$$1) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1, \\ -2x_1 + 3x_2 = -3, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$